PATVIRTINTA
Nacionalinio egzaminų centro
direktoriaus
2018 m. birželio 11 d. įsakymu Nr. (1.3.)-V1-86

2018 M. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO UŽDUOTIES VERTINIMO INSTRUKCIJA

Pagrindinė sesija

I dalis

Užd. Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ats.	**C**	**A**	**B**	**D**	**C**	**D**	**B**	**A**	**A**	**C**

II dalis

11	$(0; e^e) \cup (e^e; \infty)$ arba $x \neq e^e$ ir $x > 0$.
12.1	6.
12.2	$60°$ arba $\frac{\pi}{3}$.
12.3	12.
13.1	7 ir 8; arba $\{7; 8\}$; arba $7; 8$.
13.2	$2\frac{18}{21}$ arba $\frac{60}{21}$; arba $2\frac{6}{7}$; arba $\frac{20}{7}$.
14.1	54.
14.2	3.
15.1	2 arba $x = 2$.
15.2	$(1; 5)$ arba $1 < x < 5$.
16.1	$\{3; 7; 9\}$ arba 3; 7; 9.
16.2	4.

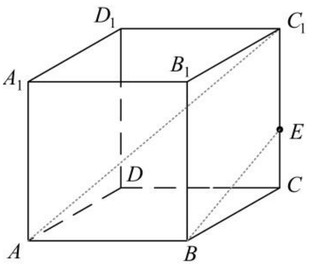
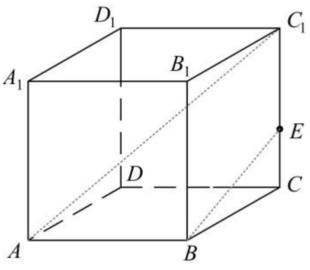
III dalis

Pastaba.
III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo vertinamas 0 taškų.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
17		**3**	
17.1		**1**	
	$1{,}5$ kg = 1500 g. $1500\cdot\frac{6}{100}=90$. *Ats.:* 90 g.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
17.2		**2**	
	I būdas Tarkime, Rugilė įpylė x g vandens. Gauname lygtį $(250+5+x)\cdot\frac{4}{100}=\frac{6}{100}\cdot 250.$	1	Už teisingai sudarytą lygtį.
	$10{,}2+0{,}04x=15,$ $x=120$ g. *Ats.:* 120 g.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Cukraus koncentracija sumažėjo $\frac{6}{4}=1{,}5$ karto. Su citrinos sultimis ir vandeniu iš viso gėrimo dabar yra $250\cdot 1{,}5=375.$	1	Už teisingai apskaičiuotą naują gėrimo masę.
	Rugilė įpylė vandens $375-250-5=120.$ *Ats.:* 120 g.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	III būdas 250 g „iTea“ gėrimo yra $250\cdot\frac{6}{100}=15$ g cukraus. Todėl naujo gėrimo yra $15:\frac{4}{100}=375$ g.	1	Už teisingai apskaičiuotą naujo gėrimo masę.
	Vadinasi, Rugilė įpylė vandens $375-250-5=120.$ *Ats.:* 120 g.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
18		**4**	
	I būdas Tarkime, kad Irutė pokemonus gaudė t dienų. Sudarome lygčių sistemą $\begin{cases} tx = 437, \\ (t-1)(x+3) = 484. \end{cases}$	1 1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygtį. Už teisingai sudarytą lygčių sistemą.
	$(t-1)(x+3) = tx - x + 3t - 3 =$ $= 437 - x + 3t - 3 = 484,$ $x = 3t - 50,$ $(3t-50)t = 437.$	1	Už teisingai sudarytą vieno kintamojo lygtį.
	$3t^2 - 50t - 437 = 0,$ $t_1 = -\frac{19}{3}$ netenkina sąlygų; $t_2 = 23,$ tenkina sąlygas. $x = 437 : 23 = 19.$ *Ats.:* 19.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Irutė gaudė pokemonus $\frac{437}{x}$ dienų. Birutė gaudė pokemonus $\frac{484}{x+3}$ dienų.	1	Už bent vieną teisingą santykį.
	$\frac{437}{x} = \frac{484}{x+3} + 1.$	1	Už teisingai sudarytą lygtį.
	$x^2 + 50x - 1311 = 0.$	1	Už teisingą trupmeninės lygties pertvarkymą į kvadratinę.
	$x_1 = 19$, $x_2 = -69$. *Ats.:* 19.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	III būdas Tarkime, kad Irutė pokemonus gaudė t dienų. Sudarome lygčių sistemą $\begin{cases} tx = 437, \\ (t-1)(x+3) = 484. \end{cases}$	1 1	Už bent vieną teisingai sudarytą lygtį. Už teisingai sudarytą lygčių sistemą.
	Kadangi $437 = 19 \cdot 23$, o 19 ir 23 yra pirminiai skaičiai, todėl t gali įgyti reikšmes 1, 19, 23 ir 437.	1	Už rastas galimas t reikšmes, naudojant skaičiaus išskaidymą pirminiais dauginamaisiais.
	Galimos sprendinių poros $(t; x)$ yra (1; 437), (19; 23), (23;19) ir (437;1). Vienintelė pora, kuri tenkina lygybę $(t-1)(x+3) = 484,$ yra (23;19), todėl $x = 19.$ *Ats.:* 19.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

<table>
<tr><th>Užd.</th><th>Sprendimas ir atsakymas</th><th>Taškai</th><th>Vertinimas</th></tr>
<tr><td>19</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>19.1</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Taip. / Gali. Pavyzdžiui, skaičiai 6, 7 ir 8 sudaro aritmetinę progresiją, o jų suma lygi 21.</td><td>1</td><td>Už teisingą atsakymą ir jo pagrindimą.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Pastabos:
• Mokinys 19.1 dalyje gali pateikti ir kitas aritmetines sekas, kurių narių suma lygi 21. Pavyzdžiui, 1, 2, 3, 4, 5, 6 arba 5, 7, 9, arba 4, 7, 10 ir pan.
• Mokinys gali seką pateikti ir pasakydamas, kam lygus pirmas narys, kiek seka turi narių ir koks yra aritmetinės sekos vardiklis. Pavyzdžiui: $a_1 = 1, d = 1, n = 6$ arba $a_1 = 6, d = 1, n = 3$ ir pan.
• Jei mokinys užrašė „6 + 7 + 8 = 21“, jam skiriamas 1 taškas.</td></tr>
<tr><td>19.2</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I būdas.
Tarkime, pirmasis aritmetinės sekos narys yra a_1, o skirtumas d yra teigiamas. Tuomet
$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + (a_1 + d) +$
$+ ... + (a_1 + (n-1)d) \geq 1 + 2 + ... + n.$</td><td>1</td><td>Už teisingai gautą mažiausią galimą n teigiamos aritmetinės sekos narių sumą.</td></tr>
<tr><td></td><td>$1 + 2 + ... + n = \dfrac{(n+1)n}{2} < 1009,$</td><td>1</td><td>Už teisingai sudarytą nelygybę.</td></tr>
<tr><td></td><td>$n < \dfrac{-1+\sqrt{8073}}{2} \approx 44{,}4.$
Ats.: 44.</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
<tr><td></td><td>II būdas.
Tarkime, pirmasis aritmetinės sekos narys yra a_1, o skirtumas d yra teigiamas. Tuomet
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ a_n = a_1 + (n-1)d,$
$a_1 \geq 1$ ir $d \geq 1$, nes seką sudaro natūralieji skaičiai, todėl
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \leq \dfrac{(n+1)n}{2},$</td><td>1</td><td>Už teisingai gautą mažiausią galimą n teigiamos aritmetinės sekos narių sumą.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\dfrac{(n+1)n}{2} < 1009,$</td><td>1</td><td>Už teisingai sudarytą nelygybę.</td></tr>
<tr><td></td><td>$n < \dfrac{-1+\sqrt{8073}}{2} \approx 44{,}4.$
Ats.: 44.</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Pastaba.
Jei parašoma $1+2+3+...+43+44=990$ ir $1+2+3+...+43+44+45=1035$ (arba $\dfrac{1+44}{2}\cdot 44 = 990$ ir $\dfrac{1+45}{2}\cdot 45 = 1035$), todėl $n = 44$, skiriami visi taškai.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Užd.</th><th>Sprendimas ir atsakymas</th><th>Taškai</th><th>Vertinimas</th></tr>
<tr><td>20</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I būdas.
Tarkime, kad kubo kraštinės ilgis yra a(m), tada
$AC_1 = \sqrt{3}a,\ CE = \frac{1}{3}a$ ir $C_1E = \frac{2}{3}a$.

</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą AC_1 ilgį.</td></tr>
<tr><td></td><td>Tarkime, tiesė, kuri eina per C_1, ir yra lygiagreti su atkarpa BE, kerta atkarpą BB_1 taške F.</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą BE ilgį.</td></tr>
<tr><td></td><td>$C_1F = BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}a.$
$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{AB^2 + C_1E^2} = \sqrt{\frac{13}{9}}a.$</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą sudaryto trikampio trečios kraštinės ilgį.</td></tr>
<tr><td></td><td>Pagal kosinusų teoremą
$AF^2 = AC_1^2 + C_1F^2 -$
$2\cos\angle AC_1F \cdot AC_1 \cdot C_1F.$
Vadinasi,
$\cos\angle AC_1F = \frac{AC_1^2 + C_1F^2 - AF^2}{2AC_1 \cdot C_1F} =$
$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$
Ats.: $\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}.$</td><td>1</td><td>Už teisingai gautą kampo reikšmę.</td></tr>
<tr><td></td><td>II būdas


Įvedame trimatę koordinčių sistemą. Tarkime, trys kraštinės eina per koordinačių ašis, o taško A koordinatės yra (0; 0; 0).</td><td>1</td><td>Už įvestą koordinačių sistemą.</td></tr>
<tr><td></td><td>Pasirenkame koordinačių sistemą, kurioje kubo kraštinės ilgis lygus 1.
Tada $\overrightarrow{AC_1} = (1; 1; 1)$, o
$\overrightarrow{BE} = \left(1; 0; \frac{1}{3}\right).$</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotas vektorių koordinates.</td></tr>
</table>

	Tarkime, α yra ieškomas kampas. Tada $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}$. $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\lvert\overrightarrow{AC_1}\rvert = \sqrt{3}$, o $\lvert\overrightarrow{BE}\rvert = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą vektorių skaliarinę sandaugą ir vektorių ilgius.
	$\cos\alpha = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$, $\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$. *Ats.:* $\arccos\frac{2\sqrt{30}}{15}$.	1	Už teisingai gautą atsakymą.

Pastaba.

Tai, kad uždavinys išspręstas ne iki galo, t. y. gauta $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{30}}{15}$ reikšmė, bet α neapskaičiuotas arba apskaičiuotas apytiksliai, šioje vietoje nelaikoma kritine klaida ir vis tiek skiriamas ketvirtasis taškas.

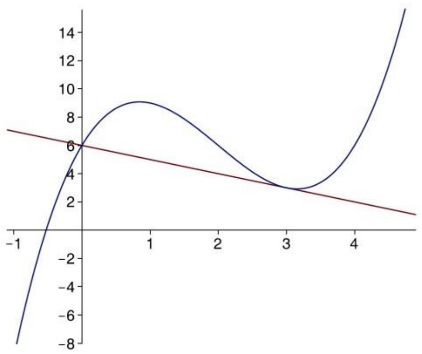
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		**5**	
21.1		**1**	
	$f(2)=\dfrac{2^2\log_2 2-\log_2 2}{2-1}=4-1=3.$ *Ats.:* 3.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		**2**	
	I būdas. Pirmiausia suprastiname reiškinį $\dfrac{x^2\log_2 x-\log_2 x}{x-1}=(x+1)\log_2 x.$ $f'(x)=\log_2 x+\dfrac{(x+1)}{x\ln 2};$	1	Už teisingai apskaičiuotą funkcijos išvestinę.
	$f'(4)=\log_2 4+\dfrac{(4+1)}{4\ln 2}=2+\dfrac{5}{4\ln 2}.$ *Ats.:* $2+\dfrac{5}{4\ln 2}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas. $f'(x)=\dfrac{\left(2x\log_2 x+\dfrac{x^2}{x\ln 2}-\dfrac{1}{x\ln 2}\right)(x-1)-x^2\log_2 x+\log_2 x}{(x-1)^2};$	1	Už teisingai apskaičiuotą funkcijos išvestinę.
	$f'(4)=\dfrac{\left(2\cdot 4\log_2 4+\dfrac{4^2}{4\ln 2}-\dfrac{1}{4\ln 2}\right)(4-1)-4^2\log_2 4+\log_2 4}{(4-1)^2};$ $f'(4)=2+\dfrac{5}{4\ln 2}.$ *Ats.:* $2+\dfrac{5}{4\ln 2}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.3		**2**	
	$f'(x)=\log_2 x+\dfrac{(x+1)}{x\ln 2}>0,$ nes abu dėmenys intervale $[2;8]$ yra teigiami.	1	Už tai, kad parašė, jog funkcijos išvestinė yra teigiama duotame intervale.
	Didėjančioji funkcija didžiausią reikšmę įgyja intervalo dešiniajame gale. $f(8)=(8+1)\log_2 8=27.$ *Ats.:* 27.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastabos:

- 21.3 dalyje esančios nelygybės $\log_2 x+\dfrac{(x+1)}{x\ln 2}>0$ nepagrindimas yra rimtas, bet ne kritinis trūkumas, todėl skiriamas 1 taškas (pirmasis).
- Jei 21.3 dalyje tik apskaičiuota funkcijos reikšmė intervalo gale ir parašytas atsakymas, skiriamas 1 taškas (antrasis).
- Jei 21.3 dalyje parodyta, kad kritiniai taškai nepriklauso intervalui $[2;8]$, apskaičiuota funkcijos reikšmė intervalo galuose ir parašytas teisingas atsakymas, skiriami visi taškai.
- Jeigu geometriškai ar kaip kitaip parodoma, kad lygtis $f'(x)=0$ intervale $[2;8]$ sprendinių neturi, t. y. tokio tipo kritinių taškų nėra ir kritinis taškas $x=0$ nepriklauso intervalui $[2;8]$, taip pat apskaičiuojamos funkcijos reikšmės intervalo galuose bei gaunamas teisingas atsakymas, skiriami visi taškai.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		**6**	
22.1		**3**	
	ABCD – pagrindas, tarkime, *BH* – aukštinė iš *B* į *AD*. $2AB = AB + CD = BC + AD =$ $= 6 + 18,$ nes keturkampis *ABCD* yra apibrėžtas apie apskritimą. $AB = 12.$	1	Už teisingai panaudotą apibrėžto keturkampio savybę.
	$2R = BH = \sqrt{144-36} = 6\sqrt{3}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą trapecijos aukštinės (apskritimo skersmens) ilgį.
	$S_{\text{skr}} = \pi R^2 = 27\pi,$ $S_{ABCD} = 12 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$ *Ats.:* 27π ir $72\sqrt{3}.$	1	Už apskaičiuotus abu plotus.
22.2		**3**	
	$V_{\text{kūg}} = \frac{1}{3}hS_{\text{skr}}$ ir $V_{\text{piram}} = \frac{1}{3}hS_{ABCD},$	1	Už kūgio ir piramidės tūrių išraišką per pagrindo plotą ir aukštinės ilgį.
	$\frac{V_{\text{kūg}}}{V_{\text{piram}}} = \frac{\frac{1}{3}hS_{\text{skr}}}{\frac{1}{3}hS_{ABCD}} = \frac{S_{\text{skr}}}{S_{ABCD}},$	1	Už teisingą suprastinimą, po kurio lieka lygybė $\frac{V_{\text{kūg}}}{V_{\text{piram}}} = \frac{S_{\text{skr}}}{S_{ABCD}}.$
	$\frac{V_{\text{kūg}}}{14} = \frac{27\pi}{72\sqrt{3}},$ $V_{\text{kūg}} = \frac{7\sqrt{3}\pi}{4}.$ *Ats.:* $\frac{7\sqrt{3}\pi}{4}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba.
Jeigu 22.1 uždavinio mokinys neišsprendė ar jį išsprendė neteisingai, tai spręsdamas 22.2 uždavinį jis turi laikyti, kad pagrindų plotai yra duoti. Todėl mokinys gali juos įvardyti bet kokiais skaičiais ar raidėmis.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
23		**6**	
23.1		**2**	
	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8,$ $f'(3) = -1.$	1	Už teisingai gautą f išvestinės reikšmę taške x_0.
	$f(3) = 3,$ $y = f(3) + f'(3)(x-3) =$ $= 3 - (x-3) = -x + 6.$ *Ats.:* $k = -1; b = 6.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastaba. Jei mokinys atsakymą pateikė pavidalu $y = -x + 6$, tai jam skiriami visi numatyti taškai.			
23.2		**4**	
	$x^3 - 6x^2 + 8x + 6 = -x + 6,$ $x^3 - 6x^2 + 9x = 0,$ $x(x^2 - 6x + 9) = 0,$ $x = 0,\ x = 3.$ 	1	Už teisingai nustatytus integravimo rėžius.
	$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 8x + 6 - (-x+6))dx =$	1	Už teisingai užrašytą plotą apibrėžtiniu integralu.
	$\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_0^3$	1	Už teisingai rastą pirmykštę funkciją.
	$S = \frac{3^4}{4} - 2\cdot 3^3 + \frac{9}{2}\cdot 3^2 = 6,75.$ *Ats.:* 6,75.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastaba. Akivaizdus sprendimo trūkumas (neįrodyta, kad kitų susikirtimo taškų tarp dviejų kreivių nėra), kai mokinys integravimo rėžius nustatė iš brėžinio, šiuo atveju nelaikomas kritine klaida, todėl jam skiriamas pirmas taškas.			

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		**6**	
24.1		**1**	
	$n = C_{12}^{8} = 495.$ *Ats.:* 495.	1	Už gautą teisingą visų galimų bandymo baigčių skaičių.
Pastaba. Jei mokinys gavo atsakymą, atsižvelgdamas į automobilių stovėjimo tvarką, t. y. 19958400, tai jam skiriamas numatytas taškas.			
24.2		**2**	
	Įvykiui palankių baigčių skaičius $m = 5.$	1	Už teisingą įvykiui palankių baigčių skaičių.
	P(įvykio) $= \frac{m}{n} = \frac{5}{495} = \frac{1}{99}.$ *Ats.:* $\frac{1}{99}.$	1	Už teisingai panaudotą klasikinės tikimybės formulę ir gautą atsakymą.
Pastaba. Jei mokinys atsižvelgė į automobilių stovėjimo tvarką ir gavo teisingą atsakymą, tai jam skiriami visi taškai.			
24.3		**3**	
	Nagrinėjame priešingą įvykį. Ieškome, keliais būdais galime laisvas vietas sudėlioti tarp automobilių. 9 tarpai tarp mašinų (įskaitant ir galus), 4 laisvos vietos.	1	Už tai, kad nurodė, jog ieškos priešingo įvykio tikimybę.
	$m = C_9^4 = 126.$	1	Už teisingą priešingam įvykiui palankių baigčių skaičių.
	P(įvykio) $= 1 - \frac{m}{n} = \frac{369}{495} = \frac{41}{55}.$ *Ats.:* $\frac{41}{55}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.